数理解析研究所講究録
233巻 1975年 40-42

Some open questions about fusion

Chicago Univ. G. Glauberman.
北大・理　吉田知行
(訳)

G: finite group, $S \in Syl_p G$ とする。G のいくつかの p-local subgroup H_i が，$H_i \supseteq S$, H_i: p-constrained, $O_{p'}(H_i)=1$ を満たすとき，H_i の間にはどのような関係があるだろう？ 例えば，$p \geq 5$ で H_i が p-solvable なら，すべての H_i は $N_G ZJ(S)$ に含まれる。

$p=2$ で G は $3'$-group, $|G|=$ even, $S \in Syl_2 G$ とする。このとき，Thompson の結果によって，S は strongly closed abelian subgroup A を持つ。

1) Thompson の結果を使わないで，これを証明できるか？

2) このような A で S において characteristic なものはあるだろうか？

この問題は結局次に還元される。

S を与え，A を上の条件を満たすある候補とする。H を S を Sylow 2-subgroup として含む，2-constrained

$3'$-groupとしたとき$A \triangleleft H$が言えるか？

さらにHをsolvable groupに制限したときはどうか。

Hが$3'$-groupでない場合はもちろん成立しない。例えば$H = S_4$とすれば$1 \neq A$ char Sについて$A \ntriangleleft H$。また$H = GL(3,2)$をとればSは1以外にstrongly closed abelian subgroupを持たない。

$p =$ oddとする。$G = Qd(p) = p^2 \rtimes SL(2,p)$とおく。($p=2$について$Qd(2) \simeq S_4$)。このとき$|S| = p^3$。この$G$に対し，$S$のどのnontrivial characteristic subgroupもGにおいて normalにならない。

さて，Hがp-constrained groupで$O_{p'}(H) = 1$，$S \in Syl_p H$とする。もしHが$Qd(p)$をinvolveしなければ，$ZJ(S) \triangleleft H$。しかし，一般にHが$Qd(p)$をinvolveすれば，$ZJ(S) \ntriangleleft H$である。Hが$Qd(p)$をinvolveし，$ZJ(S) \ntriangleleft H$と仮定。

Thompsonのquestion.

1) $x \in S - O_p(H)$で，すべてのchief factor U/V ($U \subseteq O_p(H)$)に対し$[U, x, x] \subseteq V$となるものが存在するか？

2) $H/O_p(H) \simeq SL(2, p^n)$の場合はどうか。

最後にFinite Simple Group (Higman-Powell)のp.48-50

について少し付け加える。

Q.16.2 (a) Sylow 2-group を極大 subgroup として含む G については B. Baumann, unpublished がある。

(b) generalized quaternion group を direct factor に持つ Sylow 2-group を含む G については、J. Alg. 28, 133-173.

Q.16.5. $p \geq 5$ については Thompson, Quadratic pair によって報告された。

Q.16.8. Transfer results は $H^1(G, Z_p) \simeq H^1(N_G K(S), Z_p)$ $(p \geq 5)$ を与える。

G が simple なら $H^2(G, Z_p) \simeq \Omega_1 O_p M(G)$ である。

PSL, PSU を除いて $|M(G)| \leq 48$ を証明せよ。

$p \geq 5$ について $O_p M(G)$ が cyclic であることを証明せよ。

（吉田記）